## OPCIÓN A

1. a) Discuta por qué valores de **a** el sistema siguientes tiene solución:

$$\begin{cases} x+(a-1)y+3z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \\ -ax-y+z=1 \end{cases}$$ **(7 puntos)**

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado**. (3 puntos)**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+3a & a-1+3 & 0 \\ 3+a & 3 & 0 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 3a+1 & a+2 \\ a+3 & 3 \end{vmatrix}=3\,(3a+1)-(a+3)(a+2)=$$

$$|A|=9a+3-a^2-2a-3a-6=-a^2+4a-3 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -a^2+4a-3=0 \Rightarrow a^2-4a+3=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=4\geq 0 \Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ a=\dfrac{4-2}{2}=1 \end{cases}$$

$$\forall a\in \Re-\{1\,,3\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas$$

$\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$Si\ a=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & 4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3$$

$Sistema\ Incompatible$

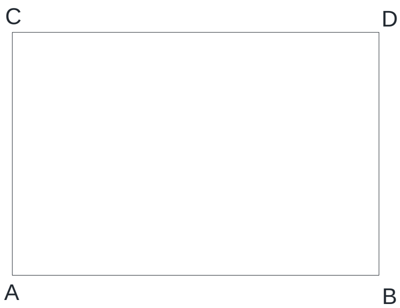
$b)$

$Si\ a=1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow x+3z=1 \Rightarrow x=1-3z \Rightarrow -y+4z=2 \Rightarrow y=-2+4z \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=(1-3\lambda\,,\,-2+4\lambda\,,\,\lambda)$$

**2**. Dados los puntos **A (0 , 0 , 0) y B (1 , 1 , 2)**. Determinar los puntos **C** y **D** tales que el cuadrilátero **ABCD** sea un rectángulo en el plano **x + y - z = 0** y la coordenada **x** del punto **C** valga 1. Véase figura adjunta. **(10 puntos)**




El vector **AB** es perpendicular al vector **AC** y, por ello, su producto escalar es nulo
El vector **AB** es perpendicular al vector **BD** y, por ello, su producto escalar es nulo
El módulo del vector **AC** es igual al del vector **BD**
Todos los puntos cumplen la ecuación del plano dado.
El vector **AD** es igual a la suma del vector **AB** y el de **BD**

$$z_C = x_C + y_C = 1 + y_C \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\,,1\,,2) - (0\,,0\,,0) = (1\,,1\,,2) \\ \overrightarrow{AC} = (1\,,y_{C,}\,1+y_C) - (0\,,0\,,0) = (1\,,y_{C,}\,1+y_C) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\,,1\,,2)\cdot(1\,,y_{C,}\,1+y_C) = 0 \Rightarrow 1 + y_C + 2 + 2y_C = 0 \Rightarrow 3 + 3y_C = 0 \Rightarrow 3y_C = -3 \Rightarrow y_C = -1 \Rightarrow z_C = 1 + (-1) = 0$$

$$C(1\,,-1\,,0)$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} = (1\,,-1\,,0) - (0\,,0\,,0) = (1\,,-1\,,0)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (1\,,1\,,2) + (1\,,-1\,,0) = (2\,,0\,,2) \Rightarrow D(2\,,0\,,2)$$

3. Considera la función **f (x) = e $^{x-3}$- x - 2** Calcular sus extremos relativos **(4 puntos),** hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento **(3 puntos)** y deducir que si $x \geq 4\,,\ f(x) \geq -4$
**(3 puntos)**

$$f'(x) = e^{x-3} - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x-3} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x-3} = 1 \Rightarrow e^{x-3} = e^0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f''(x) = e^{x-3} \Rightarrow f''(3) = e^{3-3} = e^0 = 1 > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo relativo} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f(3) = e^{3-3} - 3 - 2 = 1 - 5 = -4$$

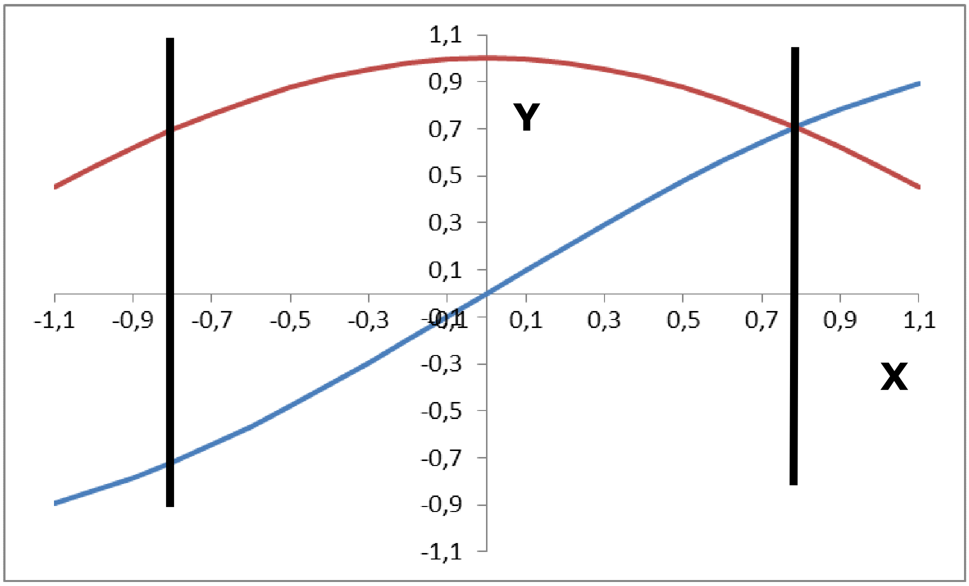
$$f'(x) = e^{x-3} - 1 \Rightarrow \textit{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x-3} - 1 > 0 \Rightarrow e^{x-3} > 1 \Rightarrow e^{x-3} > e^0 \Rightarrow (x-3)\cdot \ln e > 0 \cdot \ln e \Rightarrow$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \begin{cases} \textit{Creciente} \Rightarrow \forall x \in \Re \Rightarrow x > 3 \\ \textit{Decreciente} \Rightarrow \forall x \in \Re \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$

$$f(4) = e^{4-3} - 4 - 2 \Rightarrow f(4) = e - 4 - 2 > -4$$

Al ser la función **creciente** en el intervalo $(-\infty\,,3)$, y dado que $f(4) > -4$ se deduce que
$x \geq 4\,,\ f(x) \geq -4$

**4.** Haga un dibujo aproximado de las funciones **y = sen x** e **y = cos x** en $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ indicando los puntos donde se cortan **(5 puntos).** Calcular el área del recinto limitado por las dos curvas anteriores y las rectas verticales $x = \pm\frac{\pi}{4}$ **(5 puntos)**.




$$Puntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow sen\ x = \cos x \Rightarrow \frac{sen\ x}{\cos x} = 1 \Rightarrow tg\ x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k\ , k \in Z$$

$$Cuando\ k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX\ \Rightarrow \begin{cases} y = sen\ x \Rightarrow x = 0 + \pi k\ , k \in Z \Rightarrow x = 0 \\ y = \cos\ x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k\ , k \in Z \Rightarrow No\ hay\ en \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos\ x\ dx + \left| \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} sen\ x\ dx \right| + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos\ x\ dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sen\ x\ dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\ x\ dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} sen\ x\ dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sen\ x\ dx$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\ x\ dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sen\ x\ dx = [sen\ x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - [-\cos\ x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = [sen\ x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + [\cos\ x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A = \left[sen\frac{\pi}{4} - sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + \left[\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \sqrt{2}\ u^2$$

## OPCIÓN B

**1.** Calcula la matriz **X** tal que: **A.X.A = B** siendo: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**(10 puntos)**

$$A^{-1}AXA = A^{-1}B \Rightarrow IXA = A^{-1}B \Rightarrow IXAA^{-1} = A^{-1}BA^{-1} \Rightarrow XI = A^{-1}BA^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}BA^{-1}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

**2**. Calcule el punto simétrico al punto **A(1 , 1 , 1)** respecto al plano $\pi : x + y + 3z = 6$
**(10 puntos)**

Hallaremos la recta **r** que pasando por el punto **A** es perpendicular al plano dado $\pi$, siendo su vector director el que determina el plano.

La intersección de la recta **r** calculada y el plano es el punto **Q** , punto medio entre **A** y su simétrico **A'**.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1, 1, 3) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow Intersección \Rightarrow (1+\lambda)+(1+\lambda)+3(1+3\lambda) = 6 \Rightarrow$$

$$1+\lambda+1+\lambda+3+9\lambda = 6 \Rightarrow 11\lambda+5 = 6 \Rightarrow 11\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{11} \Rightarrow Q\begin{cases} x = 1+\frac{1}{11} \\ y = 1+\frac{1}{11} \\ z = 1+3\cdot\frac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{12}{11}, \frac{12}{11}, \frac{14}{11}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{12}{11} = \frac{1+x_{A'}}{2} \Rightarrow 11+11x_{A'} = 24 \Rightarrow 11x_{A'} = 13 \Rightarrow x_{A'} = \frac{13}{11} \\ \frac{12}{11} = \frac{1+y_{A'}}{2} \Rightarrow 11+11y_{A'} = 24 \Rightarrow 11y_{A'} = 13 \Rightarrow y_{A'} = \frac{13}{11} \Rightarrow A'\left(\frac{13}{11}, \frac{13}{11}, \frac{17}{11}\right) \\ \frac{14}{11} = \frac{1+x_{A'}}{2} \Rightarrow 11+11x_{A'} = 28 \Rightarrow 11x_{A'} = 17 \Rightarrow x_{A'} = \frac{17}{11} \end{cases}$$

**3.-** Calcular el triángulo isósceles de perímetro **9 cm** que tenga área máxima. (10 puntos)
Sean **L** los lados iguales, **B** el lado desigual y **H** la altura del triángulo

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + H^2 = L^2 \Rightarrow H^2 = L^2 - \frac{B^2}{4} = \frac{4L^2 - B^2}{4} \Rightarrow H = \sqrt{\frac{4L^2 - B^2}{4}} = \frac{\sqrt{4L^2 - B^2}}{2}$$

$$\begin{cases} 2L + B = 9 \Rightarrow B = 9 - 2L \\ A = BH \Rightarrow A = B\dfrac{\sqrt{4L^2 - B^2}}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{B\sqrt{4L^2 - B^2}}{2} = \frac{(9-2L)\sqrt{4L^2 - (9-2L)^2}}{2} = \frac{(9-2L)\sqrt{4L^2 - 81 + 36L - 4L^2}}{2}$$

$$A = \frac{(9-2L)\sqrt{36L - 81}}{2} = \frac{3\,(9-2L)\sqrt{4L-9}}{2} \Rightarrow A' = \frac{dA}{dL} = \frac{3}{2}\left[(-2)\sqrt{4L-9} + \frac{4}{2\sqrt{4L-9}} \cdot (9-2L)\right]$$

$$A' = \frac{3}{2}\left[\frac{(-2)(4L-9) + 2\,(9-2L)}{\sqrt{4L-9}}\right] = \frac{3}{2}\left(\frac{-8L + 18 + 18 - 4L}{\sqrt{4L-9}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{36 - 12L}{\sqrt{4L-9}}\right) = \frac{36}{2}\left(\frac{3-L}{\sqrt{4L-9}}\right) = 18\left(\frac{3-L}{\sqrt{4L-9}}\right)$$

$$Si\ A' = 0 \Rightarrow 18\left(\frac{3-L}{\sqrt{4L-9}}\right) = 0 \Rightarrow 3 - L = 0 \Rightarrow L = 3 \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{dL^2} = 18 \cdot \left(\frac{-\sqrt{4L-9} - \dfrac{4}{2\sqrt{4L-9}}(3-L)}{4L-9}\right)$$

$$A'' = \frac{d^2A}{dL^2} = 18 \cdot \left(\frac{\dfrac{-(4L-9) - 2\,(3-L)}{\sqrt{4L-9}}}{4L-9}\right) = 18 \cdot \left(\frac{-4L + 9 - 6 + 2L}{(4L-9)\sqrt{4L-9}}\right) = 18 \cdot \left(\frac{3-2L}{(4L-9)\sqrt{4L-9}}\right)$$

$$A''(3) = 18 \cdot \left(\frac{3 - 2\cdot 3}{(4\cdot 3 - 9)\sqrt{4\cdot 3 - 9}}\right) = 18 \cdot \left(\frac{-3}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{-18}{\sqrt{3}} = -\frac{18\sqrt{3}}{3} = -6\sqrt{3} < 0 \Rightarrow Máximo$$

$$\begin{cases} L = 3\ cm \\ B = 9 - 2\cdot 3 = 3\ cm \\ H = \sqrt{\dfrac{4L^2 - B^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4L^2 - B^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{4\cdot 3^2 - 3^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{27}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ cm \end{cases} \Rightarrow Es\ un\ triángulo\ equilátero$$

**4.**- Calcula la siguiente integral indefinida $\int \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\,dx$ **(10 puntos)**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)\cdot(x^2 - x - 2) \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ x = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

$$\frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{2x^2+x-2}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

$$\frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{A(x+1)\cdot(x-2)+B(x-1)\cdot(x-2)+C(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)}\Rightarrow$$

$$A(x+1)\cdot(x-2)+B(x-1)\cdot(x-2)+C(x-1)\cdot(x+1)=2x^2+x-2\Rightarrow$$

$$\begin{cases} Cuando\ x=-1\Rightarrow A(-1+1)\cdot(-1-2)+B(-1-1)\cdot(-1-2)+C(-1-1)\cdot(-1+1)=2\cdot(-1)^2+(-1)-2 \\ Cuando\ x=1\Rightarrow A(1+1)\cdot(1-2)+B(1-1)\cdot(1-2)+C(1-1)\cdot(1+1)=2\cdot 1^2+1-2 \\ Cuando\ x=2\Rightarrow A(2+1)\cdot(2-2)+B(2-1)\cdot(2-2)+C(2-1)\cdot(2+1)=2\cdot 2^2+2-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cdot 0\cdot(-3)+B(-2)\cdot(-3)+C\cdot(-2)\cdot 0=2-1-2\Rightarrow 6B=-1\Rightarrow B=-\frac{1}{6} \\ A\cdot 2\cdot(-1)+B\cdot 0\cdot(-1)+C\cdot 0\cdot 2=1\Rightarrow -2A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{2} \\ A\cdot 3\cdot 0+B\cdot 1\cdot 0+C\cdot 1\cdot 3=8\Rightarrow 3C=8\Rightarrow C=\frac{8}{3} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{6}}{x+1}+\frac{\frac{8}{3}}{x-2}\Rightarrow$$

$$\int\frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{8}{3}\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{6}\int\frac{du}{u}+\frac{8}{3}\int\frac{dv}{v}$$

$$\begin{cases} x-1=t\Rightarrow dx=dt \\ x+1=u\Rightarrow dx=du \\ x-2=v\Rightarrow dx=dv \end{cases}$$

$$\int\frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}\,dx=-\frac{1}{2}\ln t-\frac{1}{6}\ln u+-\frac{8}{3}\ln v=-\ln t^{\frac{1}{2}}-\ln u^{\frac{1}{6}}+\ln v^{\frac{8}{3}}=\ln\frac{v^{\frac{8}{3}}}{t^{\frac{1}{2}}\ u^{\frac{1}{6}}}=\ln\frac{v^{\frac{16}{6}}}{t^{\frac{8}{6}}\ u^{\frac{1}{6}}}$$

$$\int\frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}\,dx=\ln\frac{(x-2)^{\frac{16}{6}}}{(x-1)^{\frac{8}{6}}\ (x+1)^{\frac{1}{6}}}=\ln\sqrt[6]{\frac{(x-2)^{16}}{(x-1)^8\ (x+1)}}=\ln\left[\frac{(x-2)^2}{x-1}\sqrt[6]{\frac{(x-2)^4}{(x-1)^2\ (x+1)}}\right]+K$$